第 3 节 数列综合拔高专项（★★★☆）

内容提要

本节归纳一些数列综合小题、大题.

1．综合小题：小题种类繁多，若是压轴小题，难度往往较大，本节归纳了下面几类常见的题型.

①数列的单调性：$\{a_n\}$为递增数列$\Leftrightarrow a_n<a_{n+1}$恒成立，$\{a_n\}$为递减数列$\Leftrightarrow a_n>a_{n+1}$恒成立. 分析数列的最大项或最小项，常需要判断数列的单调性，若通项不复杂，则可根据$a_n=f(n)$，用函数的方法来判断单调性. 若通项较复杂或没给通项，只给了递推公式，则可通过作差判断$a_{n+1}-a_n$的正负来研究$\{a_n\}$的单调性；若是正项数列，也可作商判断$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$与 1 的大小.

②两数列的公共项问题：对于数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的公共项有关问题，在小题中有时可列出若干项，观察规律就能解决问题. 若要严格论证，由于公共项在两数列中的位置不同，故常设$a_m=b_n$，建立 m 和 n 的关系，结合 m，n 都为正整数来分析它们的取值情况.

③找规律：这类题会给出一列数，或一些图形，解题的突破口往往是观察它们的规律，找到了规律，就能运用数列的方法进行接下来的推理.

2．综合大题：包括开放性大题、数列的去项和添项问题等.

①开放性大题：题干可能给出几个条件，让我们选 1 个或 2 个，再解答问题，这类题作答前应先评估怎样选条件，接下来的解题过程自己比较熟悉.

②去项和添项问题：这类题的核心是分析去项、添项后的数列的构成，要解决这个问题，往往需要结合通项先估计临界位置大概在哪里，再到附近去尝试.

③特值探路法：当由所给关系式不易正面求解问题时，可考虑通过取$n=1,2,3$等来找到问题的答案，再进行分析，这种方法一般称之为“特值探路法”.

典型例题

类型Ⅰ：数列的单调性与最大最小项

【例 1】已知$\{a_n\}$为递减数列，若$a_n=-n^2+\lambda n$，则实数λ的取值范围是_____.

解析： $\{a_n\}$为递减数列可翻译成$a_n>a_{n+1}$，再研究怎样能使此不等式恒成立即可，

$a_n>a_{n+1}$即为$-n^2+\lambda n>-(n+1)^2+\lambda(n+1)$，整理得：$\lambda<2n+1$，因为$(2n+1)_{\min}=3$，所以$\lambda<3$.

答案： $(-\infty,3)$

【变式】若$a_n=\lambda(2^n-1)-n^2+4n$，且数列$\{a_n\}$为递增数列，则实数$\lambda$的取值范围是_____.

解析： $\{a_n\}$为递增数列可翻译成$a_n<a_{n+1}$，从而建立关于 n 的不等式来看，

由题意，$a_n<a_{n+1}$即为$\lambda(2^n-1)-n^2+4n<\lambda(2^{n+1}-1)-(n+1)^2+4(n+1)$，

整理得：$\lambda\cdot 2^n-2n+3>0$，所以$\lambda>\dfrac{2n-3}{2^n}$，要求$\dfrac{2n-3}{2^n}$的最大值，先分析$\left\{\dfrac{2n-3}{2^n}\right\}$的单调性，

令 $b_n=\dfrac{2n-3}{2^n}$，则 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{2(n+1)-3}{2^{n+1}}-\dfrac{2n-3}{2^n}=\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}-\dfrac{2(2n-3)}{2^{n+1}}=\dfrac{5-2n}{2^{n+1}}$，

当 $n=1$ 或 2 时，$b_{n+1}-b_n>0$，所以 $b_{n+1}>b_n$；当 $n\ge 3$ 时，$b_{n+1}-b_n<0$，所以 $b_{n+1}<b_n$；

从而 $b_1<b_2<b_3>b_4>b_5>\cdots$，故 $(b_n)_{\max}=b_3=\dfrac{3}{8}$，因为 $\lambda>b_n$ 恒成立，所以 $\lambda>\dfrac{3}{8}$.

答案：$(\dfrac{3}{8},+\infty)$

【总结】数列 $\{a_n\}$ 的单调性问题，常转化为分析 a_n 与 a_{n+1} 大小的问题.

类型Ⅱ：两数列的公共项问题

【例 2】（2020 • 新高考Ⅰ卷）将数列 $\{2n-1\}$ 与 $\{3n-2\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$，则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为_____.

解法 1：作为填空题，可列出两个数列前面的若干项，看看公共项是哪些，总结规律即可，

数列 $\{2n-1\}$ 中的项为 1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，⋯，

数列 $\{3n-2\}$ 中的项为 1，4，7，10，13，16，19，⋯，

观察可得两个数列的公共项为 1，7，13，19，⋯，所以 $\{a_n\}$ 构成首项为 1，公差为 6 的等差数列，

故 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n\times 1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 6=3n^2-2n$.

解法 2：上面的解法 1 是观察归纳出来的，若要严格论证，可用通项来建立等量关系，

设数列 $\{2n-1\}$ 的第 n 项与 $\{3n-2\}$ 的第 m 项相等，即 $2n-1=3m-2$，所以 $n=\dfrac{3m-1}{2}(m,n\in\mathbf{N}^*)$，

因为当且仅当 m 为正奇数时，$3m-1$ 才能被 2 整除，此时 n 为正整数，即 m 可取 1，3，5，⋯，

所以数列 $\{3n-2\}$ 的奇数项即为两个数列的公共项，

若设 $b_n=3n-2$，则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}$，

因为 b_1，b_3，b_5，⋯，b_{2n-1} 仍构成等差数列，所以 $S_n=\dfrac{n(b_1+b_{2n-1})}{2}=\dfrac{n[1+3(2n-1)-2]}{2}=3n^2-2n$.

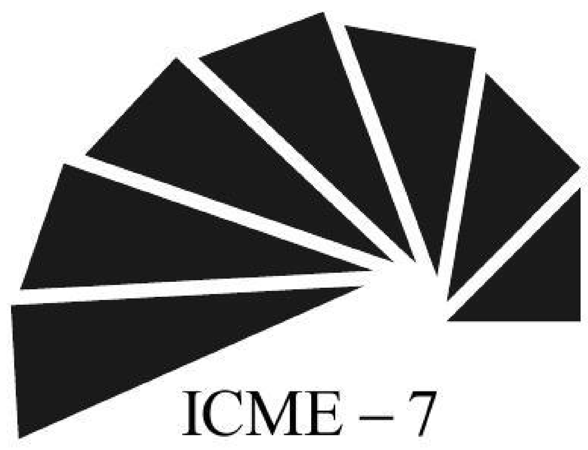
答案：$3n^2-2n$

【总结】数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公共项问题，有限罗列总结规律是小题中常用的方法之一. 若要严格论证，可设 $a_m=b_n$，建立 m 和 n 的关系，再结合 $m,n\in\mathbf{N}^*$ 来分析各自的取值情况，从而解决问题.

类型Ⅲ：找规律

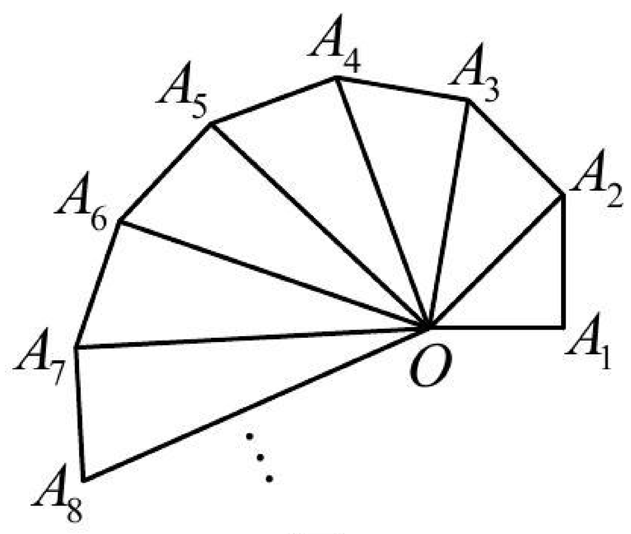
【例 3】如图甲是第七届国际数学家大会（简称 ICME − 7）的会徽图案，会徽的主题图案是由图乙的一连串直角三角形演化而成的. 已知 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=\cdots=2$，$A_1,A_2,A_3,\cdots$ 为直角顶点，设这些直角三角形的周长从小到大组成的数列为 $\{a_n\}$，令 $b_n=\dfrac{2}{a_n-2}$，S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_{120}=$（　　）

（A）8　（B）9　（C）10　（D）11



ICME－7

图甲



图乙

解析：因为 a_n 是周长，故应分析这些三角形三边的规律，其中每个三角形都有一条直角边为 2，故只需分别分析另一直角边和斜边，不妨列出前几项来观察，

由题意，$OA_1=2$，$OA_2=2\sqrt{2}$，$OA_3=2\sqrt{3}$，$OA_4=4$，…，由此可总结出 $OA_n=2\sqrt{n}$，

又第 n 个三角形的斜边为 $OA_{n+1}=2\sqrt{n+1}$，所以第 n 个三角形的周长 $a_n=OA_n+OA_{n+1}+A_nA_{n+1}=2\sqrt{n}+2\sqrt{n+1}+2$，

故 $b_n=\dfrac{2}{a_n-2}=\dfrac{2}{2\sqrt{n}+2\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，

注意到 $\sqrt{n}$ 和 $\sqrt{n+1}$ 是前后项关系，故考虑裂项相消法求和，此处分母有理化即可裂项，

所以 $b_n=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}=-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$，

故 $S_{120}=-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\cdots-\sqrt{120}+\sqrt{121}=-\sqrt{1}+\sqrt{121}=10$.

答案：C

类型Ⅳ：开放性数列大题

【例 4】（2021·全国甲卷）已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

①数列 $\{a_n\}$ 是等差数列；②数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列；③ $a_2=3a_1$.

证法 1：选①②为条件.（要证的是 $a_2=3a_1$，故直接由已知条件对 n 赋值来论证）

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $a_1+a_3=2a_2$，故 $a_3=2a_2-a_1$ （i），

又 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列，所以 $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}=2\sqrt{S_2}$，即 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_1+a_2+a_3}=2\sqrt{a_1+a_2}$ （ii），

（要证的是 a_2 与 a_1 的关系，故应消去 a_3）将式（i）代入式（ii）整理得：$\sqrt{a_1}+\sqrt{3a_2}=2\sqrt{a_1+a_2}$，

所以 $a_1+3a_2+2\sqrt{3a_1a_2}=4a_1+4a_2$，从而 $2\sqrt{3a_1a_2}=3a_1+a_2$，故 $12a_1a_2=9a_1^2+a_2^2+6a_1a_2$，

整理得：$(3a_1-a_2)^2=0$，所以 $3a_1-a_2=0$，从而 $a_2=3a_1$，故③成立.

证法 2：选①③为条件.（由 $a_2=3a_1$ 可建立 a_1 和公差 d 的关系，若把 d 用 a_1 表示，则 S_n 也能用 a_1 表示）

因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_2=3a_1$，设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d=a_2-a_1=2a_1$，

所以 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2a_1=n^2a_1$，故 $\sqrt{S_n}=\sqrt{n^2a_1}=\sqrt{a_1}\cdot n$，

所以 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\sqrt{a_1}\cdot(n+1)-\sqrt{a_1}\cdot n=\sqrt{a_1}$，从而 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列，故②成立.

证法 3：选②③为条件.（由 $a_2=3a_1$ 可把 $\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}$ 用 a_1 表示，从而求出 $\sqrt{S_n}$）

因为 $a_2=3a_1$，所以 $\sqrt{S_2}=\sqrt{a_1+a_2}=\sqrt{a_1+3a_1}=2\sqrt{a_1}$，

又 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列，故其公差为 $\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}$，

所以 $\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)\cdot\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}+(n-1)\cdot\sqrt{a_1}=n\sqrt{a_1}$，故 $S_n=n^2a_1$，

（有了 S_n，当然可求出 a_n，再证 $\{a_n\}$ 为等差数列）

当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_1-(n-1)^2a_1=(2n-1)a_1$，又当 $n=1$ 时，$a_n=(2n-1)a_1$ 也成立，

所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=(2n-1)a_1$，从而 $a_{n+1}-a_n=(2n+1)a_1-(2n-1)a_1=2a_1$，故 $\{a_n\}$ 是等差数列.

【反思】上面的证法 2、3，核心思想都是消元，根据 $a_2=3a_1$ 把其它有关的量全部用 a_1 表示，证出结论.

类型Ⅴ：数列中的特值探路

【例 5】已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列且公比 $q=2$，数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n，且满足 $T_{2n}+2=S_{2^n}$，求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：两个数列中，a_1，d，b_1 未知，可在 $T_{2n}+2=S_{2^n}$ 中分别取 $n=1$，2，3，建立三个方程求解它们，

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $T_{2n}+2=S_{2^n}$，所以 $\begin{cases}T_2+2=S_2\\T_4+2=S_4\\T_6+2=S_8\end{cases}$，故 $\begin{cases}\dfrac{b_1(1-2^2)}{1-2}+2=2a_1+d\\\dfrac{b_1(1-2^4)}{1-2}+2=4a_1+6d\\\dfrac{b_1(1-2^6)}{1-2}+2=8a_1+28d\end{cases}$，

整理得：$\begin{cases}3b_1+2=2a_1+d & ①\\15b_1+2=4a_1+6d & ②\\63b_1+2=8a_1+28d & ③\end{cases}$，要求的是 a_n，于是由①②、①③分别消去 b_1，再解 a_1 和 d，

由①×5−②得：$6a_1-d=8$ ④，由①×21−③得：$34a_1-7d=40$ ⑤，

联立④⑤解得：$a_1=2$，$d=4$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=4n-2$.

【反思】若已知某一个或几个数列为等差、等比数列，但又不易直接翻译已知条件求得通项，还可考虑取特值探路. 例如本题就是通过取 $n=1,2,3$ 构造关于 a_1，b_1 和 d 的方程组，求解出了两个数列的参数.

类型Ⅵ：数列中的去项、添项问题

【例 6】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n=2a_n-n(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）证明数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=2n-1$，在数列 $\{b_n\}$ 中将 $\{a_n\}$ 中的项去掉，余下的项按原顺序构成数列 $\{x_n\}$，求 $x_1+x_2+\cdots+x_{80}$.

解：（1）（给出 S_n 与 a_n 混搭的关系式，让求 a_n，考虑退 n 相减，消去 S_n）

因为 $S_n=2a_n-n$，所以当 $n\ge 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)$，从而 $S_n-S_{n-1}=2a_n-n-[2a_{n-1}-(n-1)]$，

故 $a_n=2a_n-2a_{n-1}-1$，整理得：$a_n=2a_{n-1}+1$，所以 $a_n+1=2(a_{n-1}+1)$ ①，（需再验证 $a_1+1\ne 0$）

在 $S_n=2a_n-n$ 中取 $n=1$ 可得 $S_1=a_1=2a_1-1$，所以 $a_1=1$，故 $a_1+1=2\neq 0$，

结合①可得 $\{a_n+1\}$ 是首项和公比都为 2 的等比数列，所以 $a_n+1=2\times 2^{n-1}$，故 $a_n=2^n-1$.

（2）由题意，$\{b_n\}$ 是由正奇数构成的数列，（先看 $\{b_n\}$ 的前 80 项中哪些也在 $\{a_n\}$ 中，它们就是要去掉的）

$b_{80}=2\times 80-1=159$，注意到 2^n-1 必为奇数，所以 $\{a_n\}$ 中的项全部在 $\{b_n\}$ 中，

又 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=7$，$\cdots$，$a_7=127$ 都小于 b_{80}，$a_8=255>b_{80}$，

（说明 $\{b_n\}$ 前 80 项中应去掉 $\{a_n\}$ 的前 7 项，剩 73 项，再看 $b_{81},b_{82},\cdots,b_{87}$ 这 7 项中还会不会去项）

又 $b_{87}=2\times 87-1=173<a_8$，所以 $\{b_n\}$ 的前 87 项中恰有 7 项在 $\{a_n\}$ 中，去掉这 7 项即得 $\{x_n\}$ 的前 80 项，

所以 $x_1+x_2+\cdots+x_{80}=b_1+b_2+\cdots+b_{87}-(a_1+a_2+\cdots+a_7)$

$$=\frac{87\times(b_1+b_{87})}{2}-(2^1-1+2^2-1+\cdots+2^7-1)=\frac{87\times(1+173)}{2}-[\frac{2\times(1-2^7)}{1-2}-7]=7322.$$

【变式】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=\dfrac{3n^2-n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设集合 $P=\{x\,|\,x=a_n,n\in\mathbf{N}^*\}$，$Q=\{x\,|\,x=6n-3,n\in\mathbf{N}^*\}$，将集合 $P\cup Q$ 中的项按照从小到大的顺序排列，得到数列 $\{x_n\}$，求数列 $\{x_n\}$ 的前 50 项和.

解：（1）（已知 S_n 求 a_n，用 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$ 计算即可）因为 $S_n=\dfrac{3n^2-n}{2}$，所以 $a_1=S_1=1$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{3n^2-n}{2}-\dfrac{3(n-1)^2-(n-1)}{2}=3n-2$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $a_n=3n-2(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2）（从条件来看，把 $\{a_n\}$ 和 $\{6n-3\}$ 的项合在一起，就构成了 $P\cup Q$，但由于 $P\cup Q$ 中不允许元素重复，所以若有公共项，则公共项只计入一次，故先分析 $\{a_n\}$ 和 $\{6n-3\}$ 有无公共项）

记 $b_n=6n-3$，则 $b_{n+1}-b_n=6(n+1)-3-(6n-3)=6$，所以 $\{b_n\}$ 是公差为 6 的等差数列，

若 $b_n=a_m$，则 $6n-3=3m-2$，所以 $m=2n-\dfrac{1}{3}$，因为 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$2n-\dfrac{1}{3}\notin\mathbf{N}^*$，

所以 $m=2n-\dfrac{1}{3}$ 不可能成立，从而 $b_n=a_m$ 不可能成立，故 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 没有公共项，

（接下来分析 $\{x_n\}$ 的前 50 项中，哪些是 $\{a_n\}$ 的，哪些是 $\{b_n\}$ 的，观察通项可知 $\{b_n\}$ 增长得比 $\{a_n\}$ 快，故由小到大排序后，$\{x_n\}$ 的前 50 项中，$\{b_n\}$ 的项肯定比 $\{a_n\}$ 少，结合 n 的系数是 2 倍的关系，不妨先考虑 $\{a_n\}$ 的第 33 项和 $\{b_n\}$ 的第 17 项，把它们附近的几项都算出来看看）

因为 $b_{16}=6\times 16-3=93$，$b_{17}=6\times 17-3=99$，$b_{18}=6\times 18-3=105$，$a_{33}=3\times 33-2=97$，

$a_{34}=3\times 34-2=100$，所以 $b_{16}<a_{33}<b_{17}$，$a_{34}>b_{17}$，

（这就说明数列 $\{x_n\}$ 第 50 项附近的顺序应为 a_{33}，b_{17}，a_{34}，$\cdots$）

从而数列$\{x_n\}$的前 50 项由数列$\{a_n\}$的前 33 项和数列$\{b_n\}$的前 17 项构成，

故$x_1+x_2+\cdots+x_{50}=(a_1+a_2+\cdots+a_{33})+(b_1+b_2+\cdots+b_{17})=\dfrac{33(a_1+a_{33})}{2}+\dfrac{17(b_1+b_{17})}{2}$

$=\dfrac{33\times(1+97)}{2}+\dfrac{17\times(3+99)}{2}=2484$.

【总结】从上面两道题可以看出，数列的去项、添项问题，核心在于分析去项、添项后的数列的构成，要解决这个问题，往往需要结合通项先估计临界位置大概在哪里，再到附近去尝试.

强化训练

1.（2023 •全国模拟 •★★★）已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(20-n)\cdot(\dfrac{3}{2})^n$，则$a_n$取得最大值时，$n=$_____.

2.（2022 • 广东佛山统考改 • ★★★）已知$a_n=2n-1$，$b_n=3n-1$，将数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的公共项按从小到大的顺序组成一个新的数列$\{c_n\}$，设$c_{2023}=b_k$，则$k=$_____.

3.（★★★★）数列 1，1，2，1，2，4，1，2，4，8，⋯，1，2，4，⋯，2^{n-1}，⋯ 的前 60 项和$S_{60}=$_____.

4.（2022 •北京模拟 •★★★）已知数列$\{a_n\}$为等差数列，各项均为正数的等比数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=1$，$b_1=2$，$a_2+a_8=10$，_____. 现有条件：① $\lambda S_n=b_n-1(\lambda\in\mathbf{R})$；② $a_4=S_3-2S_2+S_1$；③ $b_n=2\lambda a_n(\lambda\in\mathbf{R})$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）条件①②③中有一个不符合题干要求，请直接指出；（无需证明）

（3）从剩余的两个条件中选一个填到上面的横线上，求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和T_n.

5．（2023•四川绵阳二诊•★★★）已知等比数列$\{b_n\}$的各项都为正数，$b_1=\dfrac{2}{3}$，$b_3=\dfrac{8}{27}$，数列$\{a_n\}$的首项为1，前n项和为S_n，请从下面①②③中选一个作为条件，判断是否存在$m\in\mathbf{N}^*$，使得$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_nb_n\le a_mb_m$恒成立？若存在，求出m的值；若不存在，说明理由.

①$2a_n-S_n=1(n\in\mathbf{N}^*)$；②$a_2=\dfrac{1}{4}$且$a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2(n\ge 2)$；③$a_n-1=a_{n-1}(n\ge 2)$.

6．（2023•内蒙古赤峰模拟•★★★）正项数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=3$，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，且_____.

从下面的三个条件中选一个填在上面的横线上，并解答后面的两个问题.

①$a_{2k-1}=k(2k-1)$且$a_{2k}=k(2k+1)$，其中$k\in\mathbf{N}^*$；②$\{\sqrt{8a_n+1}\}$为等差数列；③$\{(n+1)S_n\}$为等差数列.

问题：（1）求$\{a_n\}$的通项公式；（2）求证：$S_na_n=n^2$.

7．（2023•安徽阜阳模拟•★★★）已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n+1$，等比数列$\{b_n\}$满足$b_2=a_1-1$，$b_3=a_2-1$.

（1）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，求满足$T_n=S_m(4<n\le 10)$的所有数对(n,m).

8．（2023•江苏盐城模拟•★★★）已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=1$，$b_3=8$，$a_n=\log_2 b_n$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\{a_n\}$中不在数列$\{b_n\}$中的项按从小到大的顺序构成数列$\{c_n\}$，记$\{c_n\}$的前n项和为S_n，求S_{50}.

.

9.（2023·湖北武汉二调·★★★★）记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，对任意的正整数 n，有$2S_n = na_n$，且$a_2 = 3$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）对所有正整数 m，若$a_k < 2^m < a_{k+1}$，则在a_k和a_{k+1}两项中插入2^m，由此得到一个新的数列$\{b_n\}$，求$\{b_n\}$的前 40 项和.

10.（2023·新高考Ⅰ卷·★★★★）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，且$d > 1$，令$b_n = \dfrac{n^2 + n}{a_n}$，记$S_n$，$T_n$分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和.

（1）若$3a_2 = 3a_1 + a_3$，$S_3 + T_3 = 21$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$\{b_n\}$为等差数列，且$S_{99} - T_{99} = 99$，求 d.